

Praktisches Beispiel zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)?

Sepp und Hans sitzen in einem Straßenkaffee und beobachten die gegenüberliegende Busstation. Ihnen fällt etwas Interessantes auf:

Zwei Busse treffen gleichzeitig ein. Sepp stoppt mit seiner Armbanduhr wie lange es dauert, bis wieder zwei Busse gleichzeitig eintreffen.

Hans checkt den Fahrplan und stellt fest, dass Buslinie A alle 12 Minuten und Buslinie B alle 14 Minuten eintrifft.

Folgende Fragen kommen auf:

- a) Wie lange dauert es bis beide Busse wieder gleichzeitig eintreffen?
- b) Wie lange müssen Sepp und Hans warten, bis danach noch einmal zwei Busse zur gleichen Zeit eintreffen?

Lösung

Vielfaches Busline A: 12, 24, 36, 48, 60, 72, **84**, 96, ..., **168**, ..., **252**, etc.

Vielfaches Buslinie B: 14, 28, 42, 56, 70, **84**, 98, ..., **168**, ..., **252**, etc.

Bus A und Bus B kommt nach 84 (kgV) Minuten wieder gemeinsam an. Das nächste mal nach 168 Min. und der darauf folgende nach 252 Minuten.

Information

zur mathematischen Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) zweier Zahlen a und b.

Definition ggT

Man bezeichnet die Zahl, die in zwei (oder mehreren) Zahlen ohne Rest enthalten ist, als größten gemeinsamen Teiler (ggT) der beiden Zahlen.

Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers (ggT)

Durch wiederholendes „Dividieren mit Rest“ bis der Rest den Wert 0 hat. Der letzte Divisor ist der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen.

Beispiel (192 / 108 = ?)

Dividend		Divisor	=	ganzzahliger Anteil	=	Rest
192	:	108	=	1	=	84
108	:	84	=	1	=	24
84	:	24	=	3	=	12
24	:	12	=	2	=	0

Lösung

ggT(192;108) = **12**.

Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)

Der Zusammenhang zwischen dem Produkt der beiden Zahlen a und b und dem Produkt aus dem $\text{ggT}(a; b)$ und dem $\text{kgV}(a; b)$ berechnet den kgV . Es gilt:

$$a \cdot b = \text{ggT}(a; b) \cdot \text{kgV}(a; b)$$

Wenn der $\text{ggT}(a; b)$ bereits berechnet ist, ist die Gleichung folgendermaßen aufzulösen:

$$\text{kgV}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggT}(a; b)} \quad \text{kgV}(192; 108) = \frac{192 \cdot 108}{12} \quad \text{kgV}(192; 108) = 1728$$

Die zweiten Möglichkeiten soll nun mit einem Programm durchgeführt werden. Der Algorithmus lässt sich so beschreiben:

- Die erste Zahl wird als Dividend eingesetzt.
- Die zweite Zahl wird als Divisor verwendet.
- Es wird der ganzzahlige Anteil der Division ermittelt.
- Der Rest der Division wird ausgegeben.
- Hat der Rest den Wert „0“, dann ist der Divisor der größte gemeinsame Teiler (ggT).
- Ist der Rest ungleich „0“, wird der Divisor zum neuen Dividenden und der Rest wird zum neuen Divisor.
- Das Verfahren wird solange wiederholt bis der Rest den Wert „0“ hat.

Anwendung

Nicht jeder Bruch kann in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Jeder Versuch scheitert an deren Ungenauigkeit.

$$1/3 = 0,3333\dots$$

$$5/99 = 0,0505050505\dots$$

Bei präzisen Berechnungen ist also ein Umwandeln von Dezimalzahlen unzulässig. Somit muss mit Brüchen und deren „Hauptennern“ gerechnet werden. Ein ggT hilft es den Hauptnenner möglichst klein zu halten. So können z. B. Rechenprozesse schnell und überschaubar bleiben.

Aufgaben

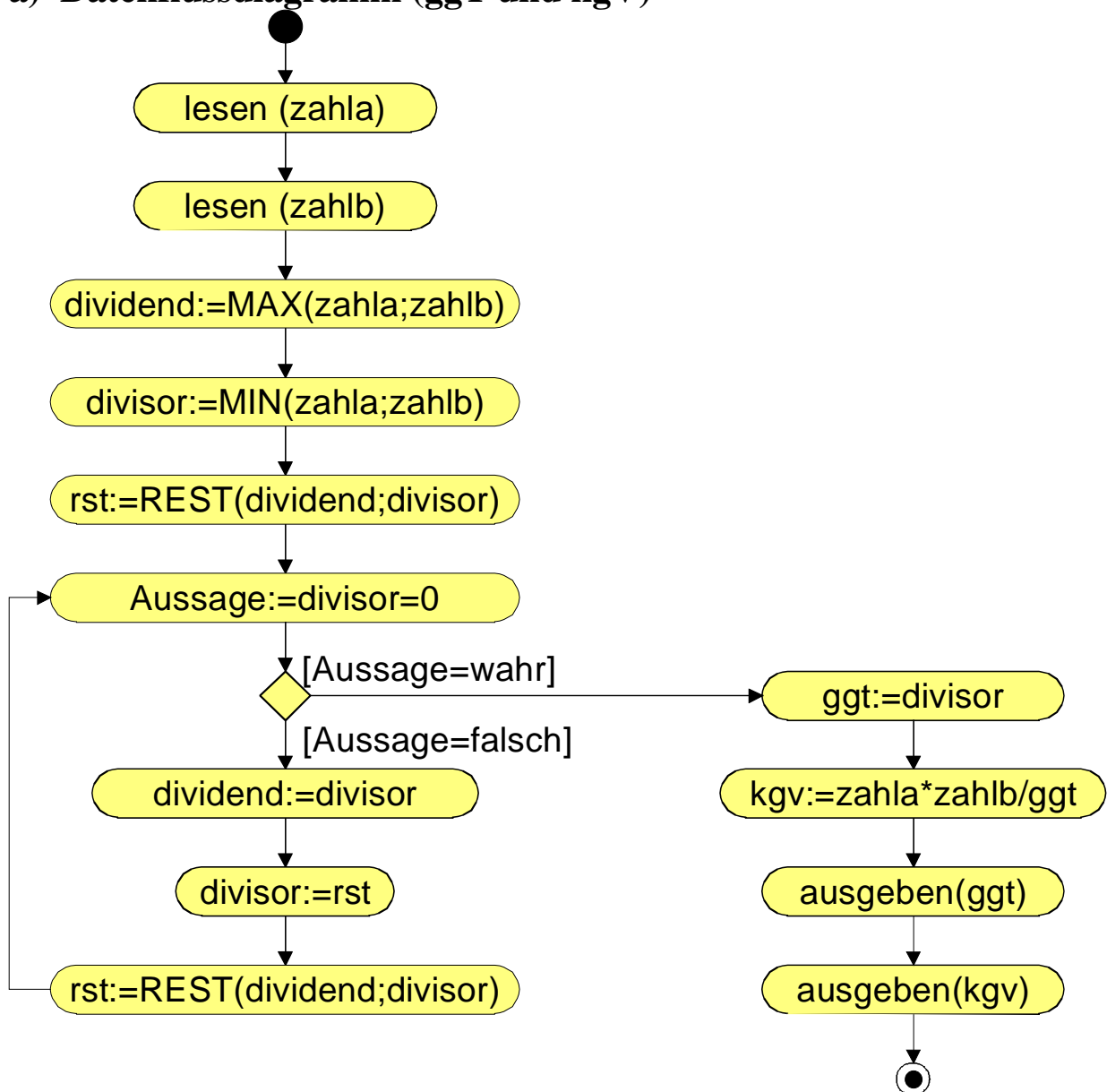
Es soll ein ggT und kgV Rechner per Tabellenkalkulation erstellt werden.

- Erstelle ein **Datenflussdiagramm** zur Darstellung der ggT und kgV Berechnung
- Realisiere das Datenflussdiagramm per Excel.**

Prämisse: Hat der Dividend oder/und der Divisor **keinen Eintrag**, so soll auch **keine Berechnung angezeigt** werden.

Lösungen

a) Datenflussdiagramm (ggT und kgV)



b) Realisierung des Ablaufdiagrammes (per Excel)

Beispiel: Zug A kommt alle 3,2 Stunden und Zug B alle 1,8 Stunden am Bahnhof in Traunstein an. Wie oft (Minuten) kommen alle beiden Züge zur gleichen Zeit an?

Vielfaches Zug **A**: 3,2 h x 60 Min. = 192 Min. Zug A kommt alle 192 Min.
192, 384, 576, 768, 960, 1152, 1344, 1536, **1728**, etc.

Vielfaches Zug **B**: 1,8 h x 60 Min. = 108 Min. Zug B kommt alle 108 Min.
108, 216, 324, 432, 540, 648, 756, 864, 972, 1080,
1188, 1296, 1404, 1512, 1620, **1728**, etc.

Lösung: 1728 Min / 60 Min = 28,8 Minuten
Zug A und Zug B kommen **ca. alle 29 Min. gemeinsam**
am Bahnhof Traunstein an.

The image shows an Excel spreadsheet with the following content:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Aufgabe und Prämisse: Berechne den ggT und den kgV zweier gemeinsamer Zahlen a und b. Hat der Dividend oder/und der													
2	Divisor keinen Eintrag, so soll auch keine Berechnung angezeigt werden.													
3														
4														
5		Zahl a =	192											
6														
7		Zahl b =	108											
8														
9		192 :	108 =	1	R:	84								
10		108 :	84 =	1	R:	24								
11		84 :	24 =	3	R:	12								
12		24 :	12 =	2	R:	0								
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														

Formulas and annotations shown in the spreadsheet:

- `=WENN(B9="";"";GANZZAHL(B9/D9))` (Cell D5)
- `=WENN(D5="";"";WENN(D7="";"";D5*D7))` (Cell D7)
- `=WENN(B9="";"";REST(B9/D9))` (Cell H9)
- `=WENN(B10="";"";H9)` (Cell H10)
- `=WENN(B11="";"";I9)` (Cell I9)
- `=WENN(D7="";"";WENN(D5="";"";MIN(D5;D7)))` (Cell D7)
- `=WENN(H9=0;"";D9)` (Cell D9)
- `=WENN(D5="";"";WENN(D7="";"";MAX(D5;D7)))` (Cell D7)
- `=WENN(H12=0;M6/K12;"")` (Cell M6)
- `=WENN(H12=0;D12;"")` (Cell D12)

Results shown in the spreadsheet:

- ggT = 12
- kgV = 1728
- a * b = 20736